DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.017

曲梁动态失稳力学特性研究

王亚飞[1,2],赵伟[3],张云策[4],杜洋坤[5],陶强[6],王长国[4]

(1. 南方科技大学机械与能源工程系,518055 深圳;2. 复旦大学航空航天系,200433 上海;
3. 哈尔滨工业大学航天科学与力学系,150080 哈尔滨;4. 哈尔滨工业大学复合材料与结构研究所,150080 哈尔滨;
5. 格拉斯哥大学数学与统计学院,G128QQ 格拉斯哥;6. 青岛大学机电工程学院,266071 青岛)

摘 要: 研究了塑性曲梁的动态失稳和强度骤降随曲梁初始构型、侧向脉冲速度等参数的非线性变化。研究发现,曲梁的动态跳变失稳会导致显著的强度损失,初始构型中最大高度对其屈曲失稳的影响至关重要。侧向脉冲速度是引起曲梁动态失稳和强度退化的主要因素之一。黏滞阻尼系数对系统的最大强度和整体失稳所用的时间基本没有影响,但较小的黏滞阻尼系数会导致系统的极度不稳定。这些发现对曲梁结构的设计和优化具有重要意义,揭示了曲梁结构的屈曲失稳机理及其与结构参数之间的重要关系。

关键词: 曲梁;动态失稳;Kirchhoff 理论;几何非线性

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-4939(2025)01-0157-07

Dynamic instability in curved beams

WANG Yafei[1,2], ZHAO Wei[3], ZHANG Yunce[4], DU Yangkun[5], TAO Qiang[6], WANG Changguo[4]

(1. Department of Mechanical and Energy Engineering, Southern University of Science and Technology, 518055 Shenzhen, China;
2. Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, 200433 Shanghai, China;
3. Department of Astronautic Science and Mechanics, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China;
4. Institute of Composite Materials and Structures, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China;
5. School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow, G128QQ Glasgow, UK;
6. College of Mechanical and Electrical Engineering, Qingdao University, 266071 Qingdao, China)

Abstract: This study investigates the nonlinear variation of dynamic instability and strength drop in plastic curved beams with initial configurations and lateral pulse velocity parameters. It is found that the dynamic jump instability of curved beams leads to significant strength loss, where the maximum height in the initial configuration plays a crucial role in its buckling instability. Lateral pulse velocity is one of the main factors causing dynamic instability and strength degradation in curved beams. The viscous damping coefficient has minimal impact on the system's maximum strength and the overall time for instability, but a smaller viscous damping coefficient can lead to extreme instability of the system. These findings are significant for the de-

收稿日期:2023-04-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12202105);深圳市基础研究专项自然科学基金面上项目(No. JCYJ20240813094159001)
通信作者:赵伟,副教授。E-mail:zhaowei_2022@163.com
引用格式:王亚飞,赵伟,张云策,等. 曲梁动态失稳力学特性研究[J]. 应用力学学报,2025,42(1):157-163.
WANG Yafei, ZHAO Wei, ZHANG Yunce, et al. Dynamic instability in curved beams[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(1): 157-163.

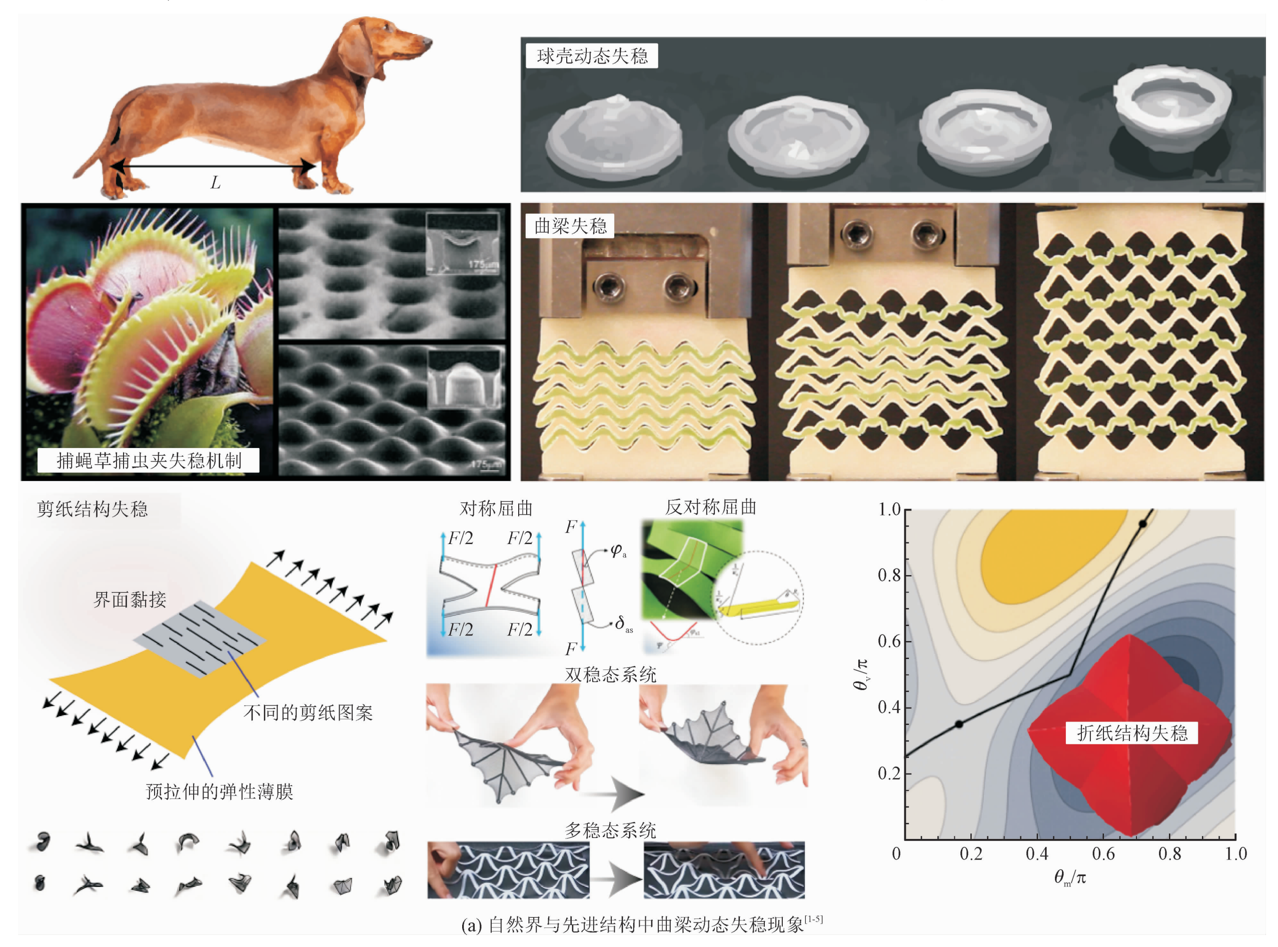
sign and optimization of curved beam structures, revealing the buckling instability mechanism of curved beams and their important relationship with structural parameters.

Key words: curved beam; dynamic instability; Kirchhoff theory; geometric nonlinearity

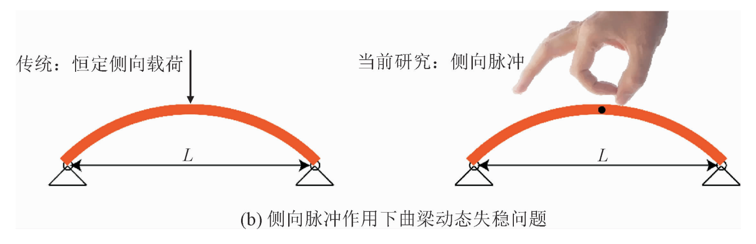
近年来,随着新材料和新结构的不断涌现,高端制造装备的结构设计正朝着轻薄、集成、复合、功能、智能和柔性化等多个方向迅猛发展。在这一背景下,传统的材料和结构设计范式以及设计理念已经不能满足人们对先进材料和结构应用不断增长的需求。另一方面,柔性电子、软材料与软机器、仿生学、微纳米器件等学科也在高速发展,迫切需要先进结构力学的支持和应用。这些领域的迅速进展为创新的结构设计和制造提供了新的机遇和可能性。

当前在先进固体力学领域,一个重要的发展趋势和研究热点是将不同尺度的基本构筑单元引入先进材料,以实现一种"自下而上"的设计范式。这种方法的核心思想是通过借鉴多个学科,包括生物学、物理学(如声学、光学、电学、磁学、热学)、化学以及应用数学等,实现跨学科的交叉融合。这有助于识别多样化和多层级的结构特征,并寻找不同学科之间的映射关系,以实现先进结构的超常规力学行为。特别值得关注的是,这种跨学科融合的方法可以用于研究先进材料与结构的强非线性力学行为,这是一个重要的发展趋势。通过将多学科的思想和方法应用于材料和结构设计中,有望实现更高级别的性能和功能,推动先进材料与结构领域的进一步创新。

曲梁因其独特的力学特性,千百年来一直在人类工程中扮演着重要的基础角色。如图1(a)所示,曲梁(模型)的应用领域广泛,包括生物形态、软超构材料[1-5]、大跨度可展机构以及航空航天组件[6-10]等,其作用不可低估。近年来,相关研究试图从更广泛、更本质的角度来构建曲梁,特别是利用其在静态和动态变形下展现的多样非线性屈曲失稳模式和相互转化等特性[11-18]。这些研究领域包括空天变形系统[19]、微电子机械系统[20-21]、具有被动黏性流动控制的流体系统[22]、能量捕获器件[23]、微致动器[24]以及用于操纵弹性孤子传播的超材料[25-26]等。



(a) 自然界与先进结构中曲梁动态失稳现象[1-5]



(b) 侧向脉冲作用下曲梁动态失稳问题

图 1　自然界启发与曲梁动态失稳

Fig. 1　Nature-inspired insights into dynamic instabilities of curved beams

曲梁的动态失稳非线性力学表现出多种特性，如变比、饱和、非单调、振荡、多值、循环、间断、滞后等。拓扑缺陷、内禀曲率、本征材料属性和能垒等因素对曲梁的非线性后屈曲失稳产生显著影响。由于非线性因果关系不满足(线性)叠加原理，与演化顺序、路径、过程等高度相关，因此，在以非线性曲梁为基本构筑单元的先进材料设计中，力学描述变得非常复杂和具有挑战性。

目前，实现曲梁的动态非线性失稳激发通常依赖于引入恒定的横向位移，这是一个广泛采用的方法[27-30]。然而，如图 1(b)所示，曲梁在侧向脉冲作用下的非线性失稳问题却是一个具有挑战性、重要性和复杂性的研究方向。在这一问题领域，需要更进一步地探索曲梁结构的动态响应，并深入研究其非线性屈曲模式的发生和相互转化等力学特性。本研究采用了理论和数值仿真相结合的方法，旨在揭示系统在动态变形条件下的多样性响应，并在不同参数和条件下研究曲梁结构的失稳特性。这些深入的研究成果对于更全面地理解曲梁结构的非线性失稳机制、进行优化设计，并将其应用于实际工程中具有重要意义。它们为曲梁结构及其相关器件的设计和应用提供了更为深刻和全面的理论支持。

1　非线性力学模型

1.1　控制方程

Kirchhoff 理论是研究柔性结构(特别是所谓的 Slender 结构)非线性大变形和振动的经典理论，其在许多领域得到广泛应用，包括机械工程、土木工程、航空航天工程和材料科学等[12-13,28-31]。为了刻画曲梁的塑性动态失稳与强度退化现象，基于非线性 Kirchhoff 理论，建立如下控制方程

$$EI[\partial^4 w(x,t)/\partial x^4 - \mathrm{d}^4 w_0(x)/\mathrm{d}x^4] + p(t)\partial^2 w(x,t)/\partial x^2 + \beta\partial w(x,t)/\partial t + \rho A\partial^2 w(x,t)/\partial t^2 + q_{L/2} = 0 \tag{1}$$

其中：L 为曲梁的跨距；$A = bh$ 为曲梁的横截面积(b 为薄板宽度，h 为薄板厚度)；$I = bh^3/12$ 代表曲梁的截面惯性矩；ρ 与 E 分别为曲梁的体积密度与杨氏模量；p 为由于薄板中面拉伸所产生的轴力；β 为黏滞阻尼系数。侧向脉冲(曲梁跨距中点处，方向竖直向下)$q_{L/2} = q\delta(x - L/2)$，其中 $\delta(x)$ 为 Dirac-delta 函数。曲梁的初始构型用 $w_0(x)$ 表示(中面处)，曲梁的侧向位移 $w(x,t)$ 是坐标 x 和时间 t 的函数。

1.2　无量纲形式

为了不失一般性，首先对上述非线性偏微分方程进行量纲分析，之后可以方便地引入下列无量纲变量，即

$$\xi = \pi x/L, \eta = (\pi/L)^2 (EI/\rho A)^{1/2} t, r = (I/A)^{1/2},$$
$$\overline{W}(\xi,\eta) = w(x,t)/r, \overline{W}_0(\xi) = w_0(x)/r,$$
$$\overline{P}(\eta) = p(t)_0 (L/\pi)^2/EI, \overline{Q}_{L/2} = 2q_{L/2}(L/\pi)^3/\pi rEI,$$
$$\overline{\beta} = \beta(L/\pi)^2/(\rho AEI)^{1/2} \tag{2}$$

这样，在 x-t 平面的偏微分方程式(1)可以转换为在相空间(ξ,η)求解的无量纲非线性偏微分方程

$$[\partial^4 \overline{W}(\xi,\eta)/\partial\xi^4 - \mathrm{d}^4 \overline{W}_0(\xi)/\mathrm{d}\xi^4] + \overline{P}(\eta)\partial^2 \overline{W}(\xi,\eta)/\partial\xi^2 + \overline{\beta}\partial\overline{W}(\xi,\eta)/\partial\eta + \partial^2\overline{W}(\xi,\eta)/\partial\eta^2 + \pi\overline{Q}_{L/2}/2 = 0 \tag{3}$$

同时，假设该微分方程满足两点边值问题，即在 $\xi = 0$ 时，$\overline{W} = 0$ 且$\partial\overline{W}/\partial\xi = 0$；在 $\xi = \pi$ 时，$\overline{W} = \partial\overline{W}/\partial\xi = 0$。此时，曲梁的初始构型可以利用一正弦函数描绘，即 $\overline{W}_0(\xi) = \overline{W}_{max}\sin(\xi)$。

1.3　曲梁的塑性表现

一般来说，塑性变形是因为应力集中导致局部应力增强引起的，这种增强通常发生在板的边缘或内部。在弯曲变形下，板的纵向伸长会导致轴向力重新分布，从而影响其承载能力。另外，轴向应力是板的最大应力分量之一，而在塑性作用下，轴向应力可能导致板的翘曲和失稳，从而影响板的力学性能和结构稳定性。因此，在 Kirchhoff 板理论中，塑性效应通常对板的轴向受力影响最大。为了充分刻画曲

梁在动态失稳中的塑性效应，假设轴向力满足如下关系

$$\bar{P}(\eta) = -(1/2\pi)\int\{[\partial\bar{W}(\xi,\eta)/\partial\xi]^2 - [\mathrm{d}\,\bar{W}_0(\xi)/\mathrm{d}\xi]^2\}\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

其中，塑性曲梁的侧向位移可以展开为

$$\bar{W}(\xi,\eta) = \bar{W}(\xi) + \sum_{n=1}^{n=N} a_n(\eta)\sin(\eta\xi)$$

1.4 控制方程解耦

基于上述关于 $\bar{W}_0$、$\bar{P}$ 与 $\bar{W}$ 的假设，经过一系列的数学操作（首先将 $\bar{W}_0$、$\bar{P}$ 与 $\bar{W}$ 的级数表达代入式(3)中，之后关于 ξ 进行[0,π]上的积分），可以将无量纲非线性偏微分方程式(3)解耦并转化为在广义坐标系 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$ 下的常微分方程组，即

$$4\frac{\mathrm{d}^2 a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\eta} + 4a_1 + \left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)(a_1 + \bar{W}_{\max}) + 4\bar{Q}_{\frac{L}{2}} = 0 \tag{5a}$$

$$4\frac{\mathrm{d}^2 a_2}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}\eta} + 64a_2 + 4\left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)a^2 = 0 \tag{5b}$$

$$4\frac{\mathrm{d}^2 a_3}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}\eta} + 32a_3 + 9\left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)a^3 - 4\bar{Q}_{\frac{L}{2}} = 0 \tag{5c}$$

⋮

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_M}{\mathrm{d}\eta^2} + \bar{\beta}\frac{\mathrm{d}a_M}{\mathrm{d}\eta} + M^4 a_M + \frac{M^2}{4}\left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)a_M + \bar{Q}_{\frac{L}{2}}\sin\frac{M\pi}{2} = 0 \tag{5d}$$

其中，侧向脉冲 $\bar{Q}_{\frac{L}{2}}$ 作为诱发曲梁动态失稳的摄动力，仅在有限的时间内对曲梁起作用。假设 $\bar{Q}_{\frac{L}{2}}$ 作用下的位移量为 $\bar{U}_{\bar{Q}_{\frac{L}{2}}} = \bar{W}_{\max} - \bar{W}(\pi/2,\eta)$，一旦侧向脉冲消失，则式(5)退化为

$$4\frac{\mathrm{d}^2 a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\frac{2\mathrm{d}^2 a_1}{\mathrm{d}\eta} + 4a_1 + \left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)(a_1 + \bar{W}_{\max}) = 0 \tag{6a}$$

$$4\frac{\mathrm{d}^2 a_j}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}\eta} + 4j^4 a_j + j^2\left(2\bar{W}_{\max}a_1 + \sum_{i=1}^{i=N} i^2 a_i^2\right)a_j = 0 \quad (j = 2,3,4,\cdots,M) \tag{6b}$$

1.5 常微分方程组的标准型变换

与单个高阶微分方程相比，高阶微分方程组的变换与求解更为复杂，令式(5)中的 $M=2$，$N=3$（足以描述曲梁的动态失稳与强度骤降力学特性），以2个高阶微分方程构成的常微分方程组为例，将这一力学问题转换为求解一个一阶显示微分方程组。这里选择一组状态变量：$y_1(\eta) = a_1(\eta)$，$y_2(\eta) = \mathrm{d}a_1(\eta)/\mathrm{d}\eta$，$y_3(\eta) = a_2(\eta)$ 和 $y_4(\eta) = \mathrm{d}a_2(\eta)/\mathrm{d}\eta$，则原方程组可以转换成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = \begin{bmatrix} y_2(\eta) \\ -\bar{\beta}y_2(\eta) - y_1(\eta) - \frac{1}{4}[y_1^2(\eta) + 4y_3^2(\eta) + 9a_3^2(\eta) + 2\bar{W}_{\max}y_1(\eta)][y_1(\eta) + \bar{W}_{\max}] - \bar{Q}_{\frac{L}{2}} \\ y_4(\eta) \\ -\bar{\beta}y_4(\eta) - 16y_3(\eta) - y_3(\eta)[y_1^2(\eta) + 4y_3^2(\eta) + 9a_3^2(\eta) + 2\bar{W}_{\max}y_1(\eta)] \end{bmatrix} \tag{7}$$

为求得 a_3，将侧向位移 $\bar{W}(\xi\eta)$ 的级数部分在 $\xi = \pi/2$ 处，展开至前3项，即 $\bar{W}(\pi/2,\eta) = \bar{W}_0(\pi/2) + \sum_{n=1}^{n=3} a_n(\eta)\sin(n\pi/2) = \bar{W}_{\max} + a_1(\eta) - a_3(\eta)$，又由于 $\bar{U}_{\bar{Q}_{\frac{L}{2}}} = \bar{V}\eta = \bar{W}_{\max} - \bar{W}(\pi/2,\eta)$，其中 $\bar{V}$ 为侧向脉冲的瞬时速度（无量纲），可得

$$a_3(\eta) = y_1(\eta) + \bar{V}\eta \tag{8}$$

之后，为了变量替换 $\bar{Q}_{\frac{L}{2}}$，基于式(8)，将微分方程拓展至 $M=3$ 的情况，此时 $\bar{Q}_{\frac{L}{2}}$ 满足

$$\frac{4\mathrm{d}^2 y_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\bar{\beta}\left[\frac{\mathrm{d}y_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta} + \bar{V}\right] + 324[y_1(\eta) + \bar{V}\eta] + 9\{2\bar{W}_{\max}y_1(\eta) + y_1^2(\eta) + 4y_3^2(\eta) + 9[y_1(\eta) + \bar{V}\eta]^2 + 2\bar{W}_{\max}y_1(\eta)\}[y_1(\eta) + \bar{V}\eta] - 4\bar{Q}_{\frac{L}{2}} = 0 \tag{9}$$

将该式与 $M=1$ 时的微分方程相比较，即可得到 $\bar{Q}_{\frac{L}{2}}$ 为

$$\bar{Q}_{\frac{L}{2}} = \frac{1}{8}[320y_1(\eta) + 80y_1^3(\eta) + 32y_1(\eta)y_3^2(\eta) + 4\bar{\beta}\bar{V} + 6y_1^2(\eta)\bar{W}_{\max} - 4y_3^2(\eta)\bar{W}_{\max} - 2y_1(\eta)\bar{W}_{\max}^2 + 324\bar{V}\eta + 234y_1^2(\eta)\bar{V}\eta + 36y_3^2(\eta)\bar{V}\eta + 234y_1(\eta)\bar{V}^2\eta^2 - 9\bar{V}^2\bar{W}_{\max}\eta^2 + 81\bar{V}^3\eta^3] \tag{10}$$

最后，将式(8)和式(10)代入到式(7)中，就可以得到原微分方程组的标准型。需要注意的是，在数值求解该微分方程组初值问题的过程中，需要引

入极其微小的量来帮助计算收敛,一般来说,可以指定 $\boldsymbol{y}(0)=[10^{-30},10^{-30},10^{-30},10^{-30}]^{\mathrm{T}}$。

2　结　果

本研究采用自适应 Runge-Kutta 法对非线性常微分方程组的标准型及其初值问题进行求解。通过研究塑性曲梁的动态失稳和强度骤降随曲梁 $\overline{W}_{max}$、$\overline{V}$ 和 $\overline{\beta}$ 的变化情况,得到了如下结果(图 2 ~ 图 4)。

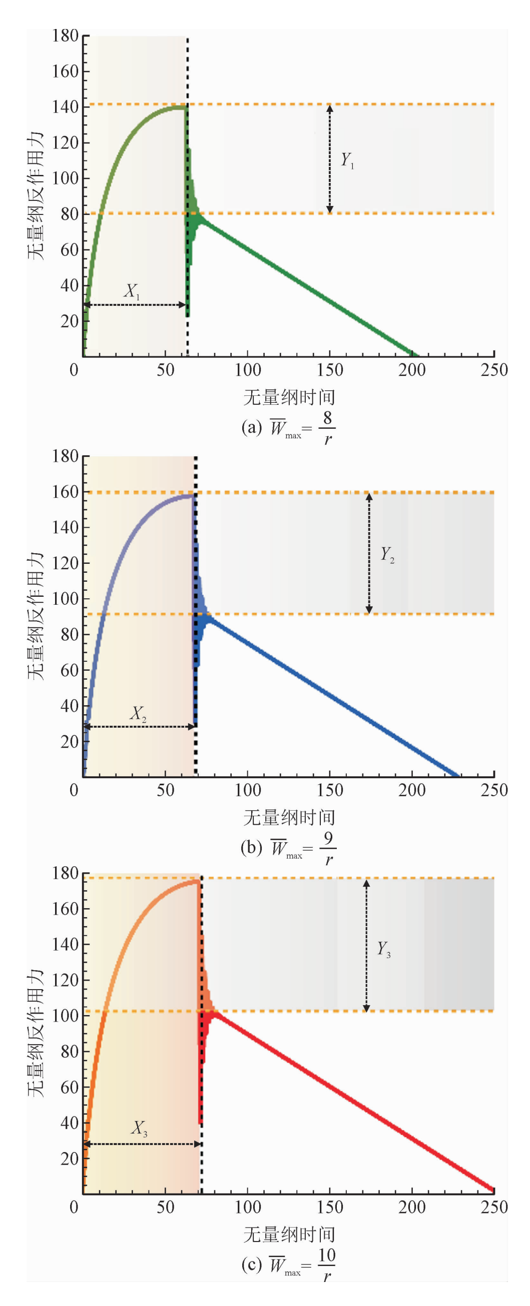


图 2　$\overline{W}_{max}$ 对塑性曲梁动态失稳与强度骤降的显著影响

Fig. 2　Significant impact of $\overline{W}_{max}$ on the dynamic instability and sudden strength drop of plastic curved beams

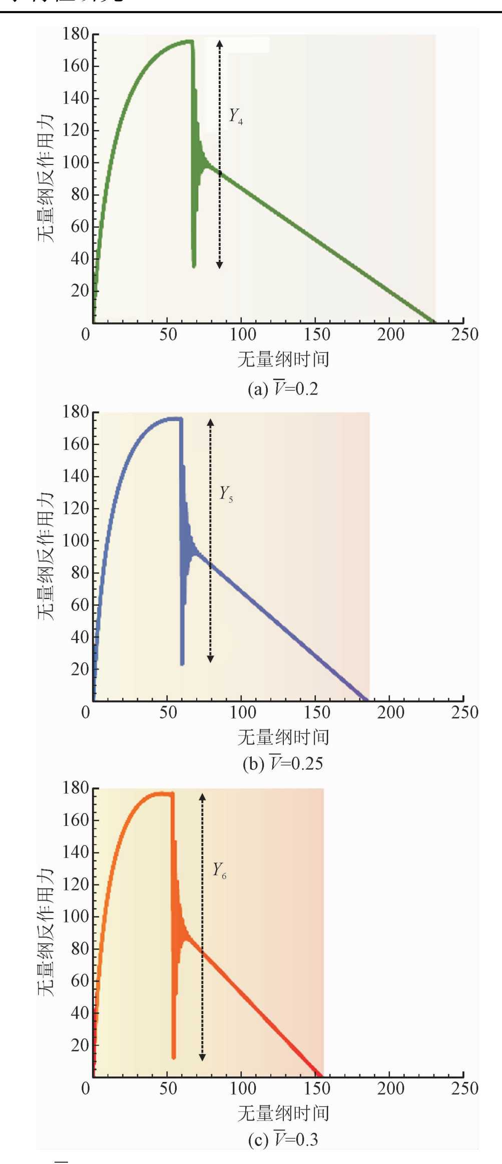


图 3　$\overline{V}$ 对塑性曲梁动态失稳与强度骤降的显著影响

Fig. 3　Significant impact of $\overline{V}$ on the dynamic instability and sudden strength drop of plastic curved beams

结果显示,曲梁的动态跳变失稳会导致显著的强度损失,如图 2 所示。同时,随着初始构型最大高度 $\overline{W}_{max}$ 的增加,曲梁的自由跳变失稳时间和强度损失水平($Y_3>Y_2>Y_1$)也不断增加。此外,曲梁的动态失稳点会随着初始构型最大高度的增加而后移($X_3>X_2>X_1$)。因此,曲梁初始构型中最大高度对其屈曲失稳的影响至关重要。另外,研究还发现,随着曲梁初始最大高度的增加,失稳载荷也会随之增加(180 > 160 > 140)。但是,失稳载荷与曲梁最大高度的关系并不是线性的,而是呈现出一种非线性的行为。在某些情况下,增加曲梁的最大高度可能会导致失稳类型的转变。这些发现对于设计和优化曲梁结构具有重要意义,揭示了曲梁结构的屈曲失稳

机理及其与结构参数之间的重要关系。

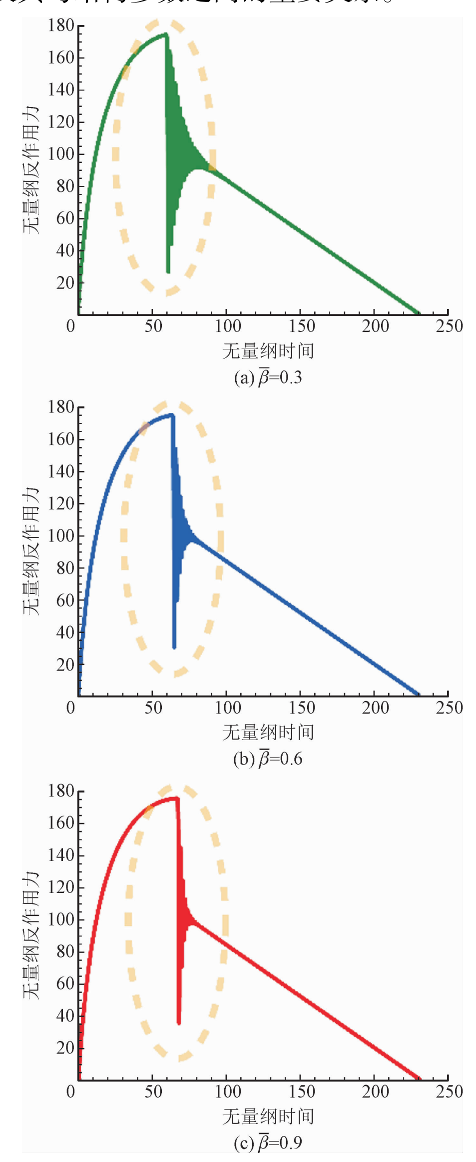


图 4 $\bar{\beta}$对塑性曲梁动态失稳与强度骤降的显著影响

Fig. 4 Significant impact of $\bar{\beta}$ on the dynamic instability and sudden strength drop of plastic curved beams

曲梁的动态失稳和强度退化是由于复杂的应力状态引起的。侧向脉冲速度是引起这种应力状态变化的主要因素之一,它可以导致曲梁在加载过程中发生不稳定的跳变。具体来说,如图 3 所示,随着侧向脉冲速度的增加,可以导致曲梁在较小的位移下发生失稳。这种失稳现象会进一步加速曲梁的强度退化。另外,侧向脉冲速度的作用时间和位移也对曲梁的屈曲失稳和强度退化产生影响。随着侧向脉冲速度的增加,曲梁的作用时间和位移也会相应增加。这意味着在跳变失稳过程中,曲梁受到的载荷会更加剧烈和不均匀,从而加速了曲梁的强度退化。当然,为了更好地理解曲梁的屈曲失稳和强度退化,需要考虑曲梁的材料性质、几何形态以及加载条件等因素,并采用适当的数值模拟方法和实验手段进行研究。这样可以更好地理解曲梁在实际应用过程中的动态非线性力学行为,为工程设计和安全评估提供科学依据。

图 4 中展示了无量纲反作用力与黏滞阻尼系数 $\bar{\beta}$ 之间的相互作用。研究表明,黏滞阻尼系数的大小对系统的最大强度和整体动态失稳所用的时间基本没有影响。更大的黏滞阻尼系数并不能显著改变这些参数。相反,更小的黏滞阻尼系数对失稳点临近区域的反作用力振荡作用有着显著的影响。具体来说,当黏滞阻尼系数较小时,失稳点附近的反作用力会出现剧烈振荡现象,这会导致系统的极度不稳定。此外,在动态失稳过程中,较小的黏滞阻尼系数 $\bar{\beta}$ 也会使得振荡时间有所增加,那么由于整体动态失稳所用时间保持不变,则曲梁自发跳变的时间将会缩短。

3 结 论

在本研究中,发现曲梁系统的动态力学响应非常多样。

1)在一定高度范围内,该系统表现出动态转变,这种动态转变在突跳失稳之前便会发生。其力学表现为反作用力的断崖式下滑,这是曲梁结构的瞬时非对称特性决定的。

2)对于能产生塑性变形的曲梁结构,发现其响应与侧向脉冲等物理参数有关。当施加的侧向脉冲的瞬时速度改变时,最大反作用力和突跳失稳时间也有显著不同。这表明,在一定条件下,可以通过调整侧向脉冲的物理参数来控制曲梁结构的失稳行为,从而实现对其功能性能的调控。

3)曲梁结构的黏滞阻尼系数对系统的最大强度和整体动态失稳所用的时间基本没有影响。这一结果进一步揭示了黏滞阻尼在曲梁瞬态失稳过程中的作用,为工程实践中阻尼控制策略的制定提供了参考。

4)本研究还考察了曲梁结构在不同初始条件和材料性质下的失稳特性。发现初始弯曲程度(几何缺陷)、材料的弹性模量等因素均对曲梁结构的失稳行为产生显著影响。这些结果为优化曲梁结构的设计提供了有益的启示,有助于在实际应用中实现更高的性能和稳定性。

参考文献:

[1] SHAN S C, KANG S H, RANEY J R, et al. Multistable architected materials for trapping elastic strain energy[J]. Advanced materials, 2015, 27(29): 4296-4301.

[2] BRUNCK V, LECHENAULT F, REID A, et al. Elastic theory of origami-based metamaterials[J]. Physical review e, 2016, 93(3): 033005.

[3] HOLMES D P, CROSBY A J. Snapping surfaces[J]. Advanced materials, 2007, 19(21): 3589-3593.

[4] WANG Y F, WANG C G. Buckling of ultrastretchable kirigami metastructures for mechanical programmability and energy harvesting[J]. International journal of solids and structures, 2021, 213: 93-102.

[5] PANDEY A, MOULTON D E, VELLA D, et al. Dynamics of snapping beams and jumping poppers[J]. Europhysics letters, 2014, 105(2): 24001.

[6] WANG C G, WANG Y F. The mechanical design of a hybrid intelligent hinge with shape memory polymer and spring sheet[J]. Composites part b: engineering, 2018, 134: 1-8.

[7] KEIBOLAHI A, KIANI Y, ESLAMI M R. Dynamic snap-through of shallow arches under thermal shock[J]. Aerospace science and technology, 2018, 77: 545-554.

[8] MELANCON D, GORISSEN B, GARCÍA-MORA C J, et al. Multistable inflatable origami structures at the metre scale[J]. Nature, 2021, 592(7855): 545-550.

[9] MHATRE S, BOATTI E, MELANCON D, et al. Deployable structures based on buckling of curved beams upon a rotational input[J]. Advanced functional materials, 2021, 31(35): 2101144.

[10] ZAREEI A, DENG B L, BERTOLDI K. Harnessing transition waves to realize deployable structures[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2020, 117(8): 4015-4020.

[11] WANG Y F, WANG C G, TAN H F. Geometry-dependent stretchability and stiffness of ribbon kirigami based on large curvature curved beam model[J]. International journal of solids and structures, 2020, 182-183: 236-253.

[12] WANG Y F, WANG C G. Mechanics of strain-limiting wrinkled kirigami for flexible devices: high flexibility, stretchability and compressibility[J]. International journal of solids and structures, 2022, 238: 111382.

[13] LIBRANDI G, TUBALDI E, BERTOLDI K. Snapping of hinged arches under displacement control: strength loss and nonreciprocity[J]. Physical review e, 2020, 101(5): 053004.

[14] BERTOLDI K, VITELLI V, CHRISTENSEN J, et al. Flexible mechanical metamaterials[J]. Nature reviews materials, 2017, 2(11): 17066.

[15] KANG S H, SHAN S C, KOŠMRLJ A, et al. Complex ordered patterns in mechanical instability induced geometrically frustrated triangular cellular structures[J]. Physical review letters, 2014, 112(9): 098701.

[16] YANG S, KHARE K, LIN P C. Harnessing surface wrinkle patterns in soft matter[J]. Advanced functional materials, 2010, 20(16): 2550-2564.

[17] EVANS M, GRAS S, FRITSCHEL P, et al. Observation of parametric instability in advanced LIGO[J]. Physical review letters, 2015, 114(16): 161102.

[18] RAFSANJANI A, ZHANG Y R, LIU B Y, et al. Kirigami skins make a simple soft actuator crawl[J]. Science robotics, 2018, 3(15): eaar7555.

[19] PENG Z K, CHU F L. Application of the wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics: a review with bibliography[J]. Mechanical systems and signal processing, 2004, 18(2): 199-221.

[20] JUDY J W. Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications[J]. Smart materials and structures, 2001, 10(6): 1115-1134.

[21] SAADON S, SIDEK O. A review of vibration-based MEMS piezoelectric energy harvesters[J]. Energy conversion and management, 2011, 52(1): 500-504.

[22] DU ROURE O, LINDNER A, NAZOCKDAST E N, et al. Dynamics of flexible fibers in viscous flows and fluids[J]. Annual review of fluid mechanics, 2019, 51: 539-572.

[23] OLABI A G, ABDELKAREEM M A, WILBERFORCE T, et al. Application of graphene in energy storage device — a review[J]. Renewable and sustainable energy reviews, 2021, 135: 110026.

[24] QUASHIE D Jr, BENHAL P, CHEN Z, et al. Magnetic bio-hybrid micro actuators[J]. Nanoscale, 2022, 14(12): 4364-4379.

[25] DENG B L, WANG P, HE Q, et al. Metamaterials with amplitude gaps for elastic solitons[J]. Nature communications, 2018, 9(1): 3410.

[26] DENG B L, TOURNAT V, WANG P, et al. Anomalous collisions of elastic vector solitons in mechanical metamaterials[J]. Physical review letters, 2019, 122(4): 044101.

[27] WANG Y F, WANG C G, TAN H F. Intrinsic edge warping of graphene nanoribbon boost molecular directional motion: toward the novel nanodevices[J]. Physics letters a, 2019, 383(13): 1473-1477.

[28] TSIATAS G C, BABOUSKOS N G. Linear and geometrically nonlinear analysis of non-uniform shallow arches under a central concentrated force[J]. International journal of non-linear mechanics, 2017, 92: 92-101.

[29] OUAKAD H M, SEDIGHI H M. Static response and free vibration of MEMS arches assuming out-of-plane actuation pattern[J]. International journal of non-linear mechanics, 2019, 110: 44-57.

[30] SOBHY M, ALAKEL ABAZID M. Dynamic and instability analyses of FG graphene-reinforced sandwich deep curved nanobeams with viscoelastic core under magnetic field effect[J]. Composites part b: engineering, 2019, 174: 106966.

[31] 许超,王博,毕皓皓,等. 双层薄膜与弹性梯度基底三层结构表面失稳分析[J]. 应用力学学报,2023,40(1):154-161.
XU Chao, WANG Bo, BI Haohao, et al. Instability analysis of bilayer films bonded to elastic graded substrate subjected to a compressive force[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(1): 154-161(in Chinese).

(编辑　吕茵)